Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali.

Di

G. VERONESE a Padova.

I sigg. W. Killing e G. Cantor hanno pubblicato recentemente due critiche alla mia teoria degli infiniti e infinitesimi attuali, che credo opportuno di confutare per non lasciare radicare nel pubblico dei falsi concetti intorno al fondamento di essa*). Queste critiche, non solo non accennano tutto quanto si riferisce nei miei *Fondamenti di Geometria* **) e in altre pubblicazioni alla detta teoria e può portar lume sull' argomento, ma dimostrano in modo non dubbio che pur prendendo di mira una piccola parte dell' opera mia non hanno riferito o interpretato con esattezza neppure le proposizioni mie in esse esaminate.

Per censurare una teoria è necessario considerare anzitutto i principî che ne formano la base, o altri che a quelli equivalgano. Un metodo diverso, pare a me, possa condurre con facilità, specialmente nelle questioni di principî, ad equivoci e a discussioni interminabili senza vantaggio della scienza. Ed è per ciò che nello studio da me fatto dei lavori sui fondamenti della geometria e compendiato nell' appendice del mio libro ho cercato di seguire sempre con attenzione e imparzialità i principî stabiliti in ogni lavoro, accennando accanto agli eventuali difetti, di cui meritasse tener conto, anche i pregi più importanti, o bene circoscrivendo il campo della critica. Tale metodo ho tenuto anche dimostrando che se le obiezioni fatte in passato contro il segmento

*) W. Killing: Bemerkungen über Veronese's Transfiniten Zahlen-Index Lectionum in Ac. Monasteriensi. 1895. — G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre in questi Annalı, vol. 46 ultimo fasc°. pag. 500—501.

**) Tradotti da A. Schepp. Lipsia 1894. L'originale lo indicherò con la lettera i, la traduzione con t.

infinitesimo attuale valgono per quello di altri autori non possono valere per il mio. Fra altro ho provato la insostenibilità della dimostrazione del postulato V d' Archimede data dal sigr Killing nelle sue „Nicht-Euclidische Raumformen" ed ho criticato la dimostrazione sull'impossibilità del segmento infinitesimo attuale del sigr. Cantor pubblicata la prima volta nel Zeitschrift der Philosophie di Fichte nell' anno 1887. Questa dimostrazione non è però completa; e non avendo potuto, nè io nè altri, conoscerla interamente, ho cercato di darle nel mio libro quella interpretazione che mi parve e mi pare tuttora la vera*)

La critica del sigr K. tenta di seguire i principî della mia teoria, e conclude che questa per la sua importanza ha bisogno di una prova ulteriore prima di essere accettata. Il sigr. K. rinuncia così implicitamente alla difesa della sua dimostrazione del postulato d' Archimede**). Basta dunque far vedere che le osservazioni di senso determinato sulle quali la sua critica si appoggia non hanno fondamento di verità.

Neanche il sigr. C. difende la sua dimostrazione dalla mia critica, ma crede invece con poche affermazioni generiche di distruggere la mia teoria***). Non mi occupo della forma e del metodo della sua censura, badando soltanto alla sostanza delle cose da lui asserite. Egli afferma la „Uebereinstimmung"†), dei miei infiniti e infinitesimi cogli „höchst absurden" numeri infiniti di Fontenelle. Io conoscevo perfettamente questi infiniti e le censure che li hanno distrutti, ed è per ciò

---

*) Veggansi anche le mie „Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale." — Atti del Circolo mat°. di Palermo, 1892.

**) Vedi anche a proposito di questo postulato A: Il continuo rettilineo e l' assioma V d' Archimede. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1890 — Elementi di Geometria in collaborazione col prof. Gazzaniga del R. Liceo di Padova, parte I litografata, Drucker ed. Padova, 1895. — Osservazioni sui principî della geometria. Atti della R. Acc. di Padova, 1894. — Tullio Levi-Civita: Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici. Atti del R. Istituto Veneto, 1893.

Nei tre primi lavori è posta la questione del postulato d' Archimede, e quindi quella dell' infinitesimo attuale, in modo diverso che ne' miei *Fondamenti;* e sotto un' altra forma si può mettere partendo dalla rappresentazione numerica dei punti della retta secondo i concetti di Klein. Vedi anche Burkhardt: Nachr. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1895. Heft I. Le ip. IV e VII e il principio dell' ip. III dell' introduzione dei miei *Fondamenti* sostituiscono il detto postulato nella teoria degli infiniti e infinitesimi e servono a costruirli. Nella memoria delDr. Levi-Civita la trattazione si svolge con metodo puramente analitico e in modo diverso.

***) Veggansi anche le lettere del sigr. Cantor pubblicate nel fascicolo di agosto di quest' anno della Rivista di Matematica, e delle quali venni recentemente per caso a conoscenza.

†) Ib. pag. 108.

che nell' appendice del libro mi limitai ad accennare a quelle critiche ed a dichiarare che la teoria di Fontenelle non è da confondersi colla mia.*). Di questa mia dichiarazione il sigr. C. non ha tenuto conto. Inoltre egli asserisce che „*Hauptursache*" degli errori del mio libro è nientemeno che una definizione (come arbitrariamente la chiama) dell' eguaglianza di due numeri. Lasciando a lui di provare queste sue affermazioni, riservandomi a mia volta di provare il contrario; mi restringo frattanto a dimostrare che le osservazioni della critica del sigr. C. sulle mie proposizioni in essa citate non sono esatte.

I.

Dato il concetto di „einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$" per Ordnungstypus (od anche Ordnungszahl) $\overline{M}$, il sigr. Cantor intende (l. c.) „den Allgemeinbegriff, welcher sich aus $\mathfrak{M}$ ergiebt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente abstrahiren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten." Chiama „ähnliche" due „geordnete Mengen" $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ quando, come io dico, si corrispondono univocamente nel medesimo ordine, e scrive $\mathfrak{M} \backsimeq \mathfrak{N}$. Da ciò, egli dice, risulta l'eguaglianza $\overline{M} = \overline{N}$ (1), e inversamente. *Questa eguaglianza è dimostrata anche nei miei Fondamenti***). Il sigr. C. afferma invece che non ho tenuto conto della necessità del criterio di eguaglianza (1). A giustificazione di queste sue parole soggiunge:

1) A pag. 30 (dei miei Fondamenti, t) viene definita l' „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe ganz in Uebereinstimmung mit dem, was wir Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge genannt haben, erklärt"***).

2) „Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und *von denen die eine nicht ein Theil der andern oder ein Theil der andern gleich ist*, sind gleich.

Diese *Definition* der Gleichheit enthält einen Cirkel.

Es setzt also seine Definition der Gleichheit (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt etc. in infinitum.*

---

*) Appendice (i, pag. 620; t, pag. 698).

**) Oss. II, nr (o §§.) 45.

***) Nell' edizione italiana è detto soltanto numero, intendendo in questo caso „Anzahl" (i, nota 2, pag. 29). Può darsi che non sempre io abbia reso con chiarezza i miei concetti e che ancora qualche svista sia rimasta, ed io sarò grato a quegli studiosi che vorranno cortesemente farmene avvertito.

Ed è questa secondo il sigr. C. l' „Hauptursache" degli errori della mia teoria sugli infiniti e infinitesimi. *L' errore del sigr. C. è doppio*, anzi tutto perchè fossero anche vere le sue osservazioni, come già dissi, esse non avrebbero alcuna influenza sulla mia teoria dei segmenti infiniti e infinitesimi, dalla quale ho dedotto le regole dei numeri che li rappresentano; in secondo luogo perchè le sue osservazioni non sono in sostanza esatte.

1) Invero la mia definizione di numero accennata dal sigr. C. secondo la def. I, 38 ivi citata *non è la stessa del suo Ordnungstypus*, come egli afferma. I contrassegni (Merkmale) delle forme matematiche astratte sono nel mio libro le relazioni di tutto e parte, di ordine e di posizione, mediante le quali si paragonano fra loro. E nella def. I, 38 stessa è stabilito una volta per sempre, quando non sia detto diversamente, che nelle forme si considerano tutti questi contrassegni. Le forme sono dunque assoggettate a priori al principio che il tutto non è eguale alla parte; il quale principio (nè il suo contradditorio) non può essere dimostrato per alcune forme, ad es. pei segmenti rettilinei, senza essere surrogato da un principio equivalente*). Dalla corrispondenza univoca e del medesimo ordine dei punti di due segmenti non si deduce che essi siano eguali. Ora, nella mia definizione citata di numero (Anzahl) avendo escluso soltanto la relazione di posizione fra gli elementi di un gruppo ordinato, considerati ciascuno come *uno*, è chiaro che oltre la relazione d' ordine non ho escluso neppure quella di tutto e di parte. Se si esclude questa relazione, si ha appunto l' *Ordnungstypus*, come escludendo anche l'ordine si ha il *Cardinalzahl* o la *Mächtigkeit* (potenza) del sigr. Cantor. Tutto sta a vedere se anche tenendo conto della relazione di tutto e parte si possano stabilire gli ordinari criteri di eguaglianza, di maggiore e di minore. Ora questi criteri si possono appunto stabilire pei miei segmenti limitati finiti, infiniti e infinitesimi, e quindi pei numeri che servono ad indicarli rispetto ad un' origine e ad un segmento dato preso come unità fondamentale.

2) Per quanto riguarda la seconda osservazione del sigr. C. dirò che la proposizione c) del nr (o §§) 45 sopra citata *non è una definizione*,

---

*) Nello studio della forma fondamentale (e quindi anche della teoria in discorso), che è scopo principale dell' introduzione, e in quello della geometria basta ammettere il detto principio pei soli segmenti. Invece di questo principio si può ammettere che nella forma fondamentale a cominciare da un dato elemento in un dato verso esista un solo segmento eguale ad un altro qualunque dato nel verso considerato, da cui appunto colle altre proprietà del sistema omogeneo (def. I, 68) date le definizioni dei segni $>$ e $<$ si ricava che fra due segmenti esiste una ed una sola delle tre relazioni $=$, $>$, $<$ che soddisfano alle regole ordinarie. (Veggansi i miei citati Elementi di Geometria pag. 16—17).

come egli asserisce, ma bensì una *conseguenza* della definizione di numero e delle cose esposte nel cap. I sull' eguaglianza. Il concetto dell' eguaglianza si svolge nel mio libro partendo dai primi principî logici che regolano il paragonare le cose fra loro, dai quali discendono subito le regole dei segni $=$ e $\mp$. Secondo la mia definizione di eguaglianza assoluta di due cose qualunque (nr. 9), esse sono eguali assolutamente o eguali, quando lo sono rispetto a tutti i *contrassegni* che di esse si considerano; mentre sono eguali relativamente o equivalenti quando sono eguali rispetto ad alcuni ma non a tutti i loro contrassegni. S'intende che tanto l' eguaglianza assoluta quanto quella relativa deve soddisfare i principî stabiliti al nr. 8.

La proposizione citata dal sigr. C. è nel mio libro letteralmente incompleta, ma da ciò che segue subito si comprende che dicendo l' uno non è parte o eguale ad una parte dell' altro, intendo dire che il gruppo ordinato (da cui deriva uno dei numeri) non è parte o eguale ad una parte del gruppo dell' altro, ammettendo che sia già stabilita in altro modo l' eguaglianza dei gruppi.

Si potrebbe dire, considerando superficialmente la definizione di eguaglianza assoluta e relativa che vi è una petizione di principio, perchè da che cosa è data a sua volta l' eguaglianza dei contrassegni? Ebbene questa deve essere ammessa senz' altro supponendo sempre che essa soddisfi ai principî già stabiliti. Così per utilizzare la definizione dell' eguaglianza ho stabilito (oss I, 71) che le forme considerate siano costruibili mediante una forma fondamentale data, sulla quale è ammessa l' esistenza di segmenti limitati eguali senza che un segmento sia eguale ad una sua parte*).

Come si vede, *la mia definizione dell' eguaglianza non ha poi nulla di arbitrario*. Tutti i concetti fondamentali dell' opera mia sono analizzati non già mediante regole stabilite a capriccio, ma facendoli scaturire man mano dalle leggi semplici del pensiero logico.

---

*) Quando due figure sono eguali si dimostra nel mio libro che si può stabilire una corrispondenza univoca fra i loro punti in modo che le figure corrispondenti (e quindi anche i segmenti rettilinei) che vi fanno parte sono ordinatamente eguali. E reciprocamente, quando si può stabilire fra due figure la detta corrispondenza fra i loro punti e i segmenti rettilinei da essi determinati, esse sono eguali. Ma anche dando una tale proposizione come definizione (come feci nei miei citati Elementi pag. 42—44), tale definizione non contiene alcuna petizione di principio, e si dimostra poi che soddisfa ai principî già stabiliti ed è sufficiente per stabilire l' eguaglianza delle figure rispetto a tutti i contrassegni che di esse si considerano. L' idea del movimento *senza deformazione* resta così affatto esclusa, e trova nel concetto di eguaglianza così definito e nelle proprietà degli enti geometrici il suo vero fondamento. Essa serve solo per costruire praticamente e approssimativamente oggetti eguali.

Aggiungo ancora che il sigr. Dr. Levi-Civita costruì un sistema di numeri coi soli numeri ordinari, senza ipotesi, i quali corrispondono in parte ai miei numeri infiniti e infinitesimi. Questo sistema è meno esteso perchè è limitato ai soli numeri finiti, infiniti e infinitesimi d' ordine finito, mentre fra questi numeri è più completo. Basta leggere le prime pagine del lavoro interessante del Dr. Levi-Civita per persuadersi che i concetti di $=$, $>$ e $<$ fra questi numeri soddisfano alle regole ordinarie di questi segni, in guisa che essi formano „eine einfach geordnete Menge" che non è punto rappresentabile coi numeri transfiniti di G. Cantor. Presi ad es i due *monosemii* 1, 1_1 del sigr. Levi-Civita (corrispondenti ai miei numeri 1 e ∞_1) si vede che fra 1 e 1_1 sono compresi i numeri:

$$2, 3, \ldots, n, \ldots (1_1 - n), \ldots (1_1 - 1)$$

pei quali è ad es. $(1_1 - n) < 1_1$, mentre i numeri $\omega - n$ e ω di Cantor sono eguali, indicano cioè lo stesso elemento nella serie dei numeri transfiniti di questo autore. Io stabilisco per convenzione (def. I, 83) che l' intervallo $(1 \ldots 1_1)$ contiene 1_1 unità 1; in altre parole che 1_1 è il numero degli elementi $1\,2 \ldots 1_1$, considerati nell' ordine dato. In tal caso il numero che spetta ad es. al gruppo

$$1\,2\,3 \ldots (1_1 - n)$$

non è eguale a quello del gruppo ordinato

$$1\,2\,3 \ldots (1_1 - n) \ldots 1_1,$$

pure potendosi stabilire una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra i loro elementi.

Non nego che secondo il concetto aritmetico col quale a un gruppo dato di unità se ne aggiunge un' altra e così via, considerando la serie dei numeri naturali come un gruppo già dato di elementi (*uni*), si presentano spontaneamente i numeri di Cantor; ma secondo il concetto geometrico della retta si presentano invece spontaneamente i miei segmenti infiniti, e quindi i numeri che il rappresentano, quando si faccia astrazione, come si può, dall' ass. V d' Archimede.

II.

Il sigr. C. cita anche con elogio la critica del sigr. Killing. Le pagine qui citate si riferiscono alla nota del sigr. K.

1) Anzitutto questa critica contiene delle osservazioni di senso non etbene determinato e quindi non posso rispondere ad esse. Non è chiaro ad es. su che cosa egli appoggi i suoi dubbi contro la mia ip. V che per me è semplicissima, nè contro la mia definizione di sistema astratto ad n dimensioni, la quale nulla ha di comune colla teoria

degli infiniti e infinitesimi; nè è chiaro finalmente che cosa intenda per *Zusammenhang* che egli vorrebbe esistesse fra le scale generate ciascuna con una data unità intorno agli elementi della forma fondamentale, sebbene io sappia che cosa significhi per me quella parola. Mi limiterò dunque alle altre osservazioni.

2) a pag. 3 è detto che un „gruppo ordinato" (s' intende secondo il mio libro) è costituito da due campi di scala generati con una unità a partire da un elemento come origine nelle due direzioni della forma fondamentale. *Ciò non è esatto*, perchè io intendo per gruppo ordinato anche tutta la forma fondamentale e quindi anche delle serie o gruppi ordinati limitati e illimitati che contengono delle parti limitate (nel senso da me definito al cap. I) che contengono delle serie illimitate. Il gruppo ordinato di segmenti eguali all' unità delle due scale considerate dal sigr. K. è illimitato di 1ª specie.

3) Sembra che la mia ip. III, dal modo con cui è citata a pag. 4, consideri dei gruppi ordinati staccati, mentre essa afferma che la forma fondamentale considerata dapprima come data è tale che costruita in un dato verso una scala di data unità a cominciare da un elemento come origine, esiste nel verso dato un elemento almeno fuori di essa scala. Del resto nella nota a pag. 129 ho dato una rappresentazione sulla retta dei campi di due scale successive di data unità (non già di tutta la forma fondamentale) ove l' ordine può essere stabilito ad es. mediante un fascio di raggi partendo dal raggio che passa per l'origine della prima scala nel verso dell' indice dell' orologio. E nella nota a pag. 184 ho dato un' altra rappresentazione geometrica in cui l' ordine dei gruppi considerati è pure pienamente stabilito dalle ordinarie definizioni di direzione di due rette o meglio di raggi paralleli.

4) A pag. 4—5 il sigr. K. trova nella mia ip. VIII un „*infinitamente piccolo*" che è invece un *indefinitamente piccolo* (unbegrenzt klein); nè ciò è una semplice svista di trascrizione. Infatti a pag. 9 egli dice che l' ip. VI (che afferma la continuità relativa, cioè in un campo nel quale fra i segmenti vale la citata proposizione d' Archimede) e l' ip. VIII *sono molto oscure perchè nella prima il segmento variabile diventa „unbegrenzt klein" e nella seconda „unendlich klein"* in senso assoluto!

Egli aggiunge che „die Art der Veränderung noch gar nicht bestimmt ist, wofern es nicht möglich ist, ein Gesetz aufzustellen, nach der die Veränderung erfolgen soll, mentre per la variazione del segmento considerato nelle ip. VI e VIII basta che esso diventi indefinitamente piccolo, vale a dire per le premesse definizioni che diventi e rimanga da un suo stato più piccolo di ogni segmento dato piccolo a piacere, finito nell' ip. VI e infinitesimo nella ip. VIII, come può accadere, senza che sia necessario per le conseguenze dedotte nel mio libro di stabilire una legge particolare di variazione*).

Il sigr. K. osserva che una tal legge poteva darla il sigr. Dedekind nell' introduzione dei numeri irrazionali, perchè aveva a disposizione i numeri razionali, mentre a me manca tale possibilità perchè io mi servo dell' ip. VI per dimostrare la divisibilità di un segmento in n parti eguali. Ciò non riguarda propriamente la legge di variazione, bensì la giustificazione dell' ipotesi; ma a questa ho accennato dopo la dimostrazione della divisibilità di un segmento in n parti eguali mediante il sistema di numeri razionali già stabilito (i, 138 e t, 154). Ma si può giustificare l' ip. VI (e così l' ip. VIII) senza ricorrere ai numeri, considerando le serie di segmenti determinati da un segmento variabile nel senso dell' ip. VI come nuovi elementi. Introducendo il concetto di identità di questi elementi, quello di segmento di due di essi, dell' eguaglianza e diseguaglianza fra i nuovi segmenti (che sono determinati dai vecchi quando i loro estremi sono individuati da due degli elementi primitivi) si fa vedere che i nuovi elementi soddisfano nel campo dell' ip. VI (o dell' ip. VIII) alle ipotesi precedenti, e valgono per essi le conseguenze dedotte da esse e dall' ip. VI (o VIII), la quale viene così sostituita da opportune definizioni. In questo modo si potrebbe evitare astrattamente il postulato della continuità.

E qui cade in acconcio di fare osservare che se nel libro io feci uso di ipotesi, le ho però giustificate secondo un ordine naturale di idee. Le ip. III e IV sono giustificate con una rappresentazione geometrica, la ip. V ha la sua giustificazione nel principio dell' ip. III applicato al campo dato dell' ip. IV; le ip. VI e VIII si giustificano nel modo anzidetto, e finalmente l' ip. VII trova la sua compatibilità nell' eguaglianza della costituzione dei segmenti, come si ammette astrattamente per tutti i segmenti ordinari.

D' altronde il gruppo *semplicemente ordinato* formato da quei numeri del Dr. Levi-Civita, costruiti senza ipotesi coi numeri reali ordinari che corrispondono ai miei, soddisfa alle proposizioni contenute nelle mie ipotesi tranne la V. Ciò costituisce, ove se ne senta il bisogno, una conferma analitica della validità di esse.

5) A pag. 5 il sigr. K. dice „Herr Veronese betrachtet die Grundform nur für sich, niemals aber ihre Lage im Raume". *Ma anche ciò non è vero* Nel libro I, § 10 e segu. io considero appunto come elemento dello spazio la retta assoluta, che rappresenta la forma fondamentale, limitata ai campi finito, infiniti e infinitesimi d' ordine finito, perchè per le considerazioni geometriche svolte nei miei *Fondamenti* basta limitarsi a questi campi.

---

*) Veggansi anche i citati Elementi di Geom. pag. 29 e segu.

6) A pag. 6 per provare che sono giustificati i dubbî sulle mie ipotesi, il sigr. K. dice: „So wird in § 99, f (i, 144, t. 159) getadelt, dass vielfach die Behauptung $(AB) \equiv (BA)$ als Axiom hingestellt werde, während sie sich aus allgemeinen Grössensätzen ergebe.“ Ma questo egli aggiunge: „kann nicht aus allgemeinen Grössensätzen folgen“.

Ed anche questo è errato. Invero nella nota a pag. 144 dell' originale (opp. t, 159) *non ho detto affatto che la proposizione* 99, g (e non f) *derivi aus allgemeinen Grössensätzen;* ne ho inteso biasimare l' uso di quel postulato in generale, poichè evidentemente (come ho detto nella prefazione del libro) non vi è un solo sistema possibile di assiomi; ma espressamente ho parlato di quei trattati di geometria, o di altre memorie, nei quali si fa uso dei postulati da me usati nella dimostrazione di quella proposizione, e per chiarire meglio il mio concetto ho citato gli Elementi di Geometria di De Paolis accennando da quali postulati di questo autore si deduca la proposizione $(AB) \equiv (BA)$, che è pure ammessa da De Paolis con un postulato tanto pei segmenti rettilinei quanto per gli angoli*).

7) A pag. 7 egli dice che se la teoria dei numeri transfiniti di Cantor è esatta „so darf Herr V. nicht, wie er es thut, einen Gegensatz zwischen beiden Theorien postuliren, namentlich dürfen beide nicht zu entgegengesetzten Folgerungen führen, wie das hier der Fall ist, denn nach Herrn Cantor's Ansicht leiden die actual unendlich kleinen Grössen an einem inneren Widerspruch“. Di ciò ho parlato precedentemente; le due teorie sono per sè esatte; ma l' „Ansicht“ del sigr. Cantor non è esatta, eccetto che non si ammetta per la retta un postulato che escluda a priori l' infinitesimo attuale. Ho fatto già vedere nell' appendice che se invece di scegliere il mio postulato sulla continuità della retta si assume quello di Dedekind, allora non c' è bisogno di ricorrere ai numeri transfiniti di Cantor per dimostrare la proposizione di Archimede.

8) Alla fine della sua nota (pag. 10—11) il sigr. K. parla della rappresentazione da me data dei segmenti finiti e infiniti di 1° ordine (esclusi però gli infinitesimi). Sembra a lui che mi siano sfuggiti i gravi dubbi che si oppongono a tale rappresentazione, perchè è stato dimostrato che „zwei Mannigfaltigkeiten nur dann in eindeutiger und stetiger Weise auf einander abbilden kann, wofern sie von derselben Zahl von Dimensionen sind.“ L' appendice del mio libro dimostra che una tale proprietà mi era nota. Ma a giustificazione delle sue parole il sigr. K. aggiunge: „Die Theorie des Herrn V. beruht aber darauf,

*) Nei miei Elementi di Geometria per ragioni didattiche l' ho data anch' io per i segmenti con un postulato.

dass man ein Raumgebilde von beliebigen vielen Dimensionen auf ein dimensionales Gebilde eindeutig und stetig abbilden kann." *Ed anche questo non è vero*, perchè vi è la corrispondenza univoca, non la continuità. Ma se anche vi fosse la continuità, ciò non proverebbe ancora nulla contro la mia teoria, perchè il teorema sopra citato fu dimostrato per le sole varietà ordinarie dalle quali sono esclusi gli infiniti e gli infinitesimi.

Padova, novembre 1885.